

TIPO DE ESPACIO AL QUE CORRESPONDE EL PLAN **MATEMÁTICA NIVEL 4**

NOMBRE DEL ESPACIO **MATEMÁTICA**

NOMBRE DEL PLAN: **PLAN 1 : “ El vértice del éxito”/Más allá de una curva**

DURACIÓN **1 BIMESTRE** UBICACIÓN TEMPORAL DEL PLAN **1ER BIMESTRE**

**SINOPSIS:** En este plan en un comienzo recuperaremos los conocimientos adquiridos en tercer año sobre Función lineal y su aplicación en diferentes situaciones de la vida cotidiana. Esto nos permitirá avanzar en el estudio de funciones particularmente la denominada : Función Cuadrática. Además voy a ayudarte a comprender y aplicar la función cuadrática en diferentes contextos. Lograrás especializarte en su representación gráfica que es la parábola, conociendo y hallando sus elementos, representándola gráficamente y analizando su comportamiento.

**CONTENIDOS:** *A lo largo de este plan aprenderás:*

- Producción de fórmulas en diferentes contextos en los que la variable requiere ser elevada al cuadrado.
- Gráfica y análisis de la función cuadrática. La parábola como representación gráfica de funciones cuadráticas. Vértice, eje de simetría, ceros o raíces, crecimiento, decrecimiento, positividad, negatividad. Diferentes fórmulas (polinómica, canónica, factorizada).
- Problemas que se modelizan a través de una función cuadrática. Análisis de la función  $f(x) = x^2$  Estudio comparativo con la función lineal en términos de crecimiento.
- Uso de software de cálculo y representación para estudiar el comportamiento de funciones cuadráticas.
- Variaciones de los gráficos en función de las variaciones de las fórmulas y viceversa. Incidencia en el vértice y en el eje de simetría.

**OBJETIVOS:** Se espera que logres: ...

- Modelizar y resolver situaciones problemáticas extra e intramatemáticas que involucren funciones y ecuaciones cuadráticas.
- Establecer relaciones entre los tratamientos algebraicos, la representación gráfica y el contexto del problema que se está resolviendo en las diferentes modelizaciones.
- Valorar el intercambio entre pares como medio para producir soluciones a los problemas, validar las respuestas obtenidas y las relaciones matemáticas elaboradas.

## PUNTO DE PARTIDA

Comenzaremos recordando las características más importantes de la función lineal para luego arribar a los conocimientos de la siguiente función que aprenderemos en este plan qué es la función cuadrática.

En este plan, te adentrarás en el mundo de las expresiones cuadráticas, explorando su estructura, gráficas y aplicaciones. Aprenderás a manipular expresiones algebraicas, a resolver ecuaciones cuadráticas, conectando estos conceptos con situaciones del mundo real. En esta primera etapa, iniciarás tu viaje de manera autónoma, activando tus conocimientos previos sobre álgebra y operaciones matemáticas. Lograrás identificar las conexiones con los nuevos contenidos que descubrirás a lo largo de este plan. Es fundamental que trabajes de forma individual como colaborativamente y reflexiones sobre tus respuestas, ya que esta etapa inicial te preparará para los desafíos que enfrentarás en los siguientes módulos.

### DURACIÓN ESTIMADA DE LA ETAPA

### RECURSOS

Plan de aprendizaje, carpeta con hojas, cartuchera completa, calculadora, netbook.

#### Actividad 1:

a)

Camila trabaja en una empresa que tiene un tanque de agua que se llena con una bomba, siempre al mismo ritmo. Esta mañana tuvo que registrar en una tabla el volumen de agua que contenía el tanque en ciertos momentos. Cuando se encendió la bomba el tanque ya contenía algo de agua. Por una distracción, no pudo observar la marca del volumen a los 90 minutos. ¿Cuál podría haber sido la cantidad de agua en ese momento?

| Tiempo desde que se encendió la bomba (minutos) | Volumen de agua en el tanque (litros) |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------|
| 30                                              | 390                                   |
| 60                                              | 600                                   |
| 90                                              |                                       |
| 100                                             | 880                                   |
| 120                                             | 1020                                  |

¿Es posible determinar cuántos litros de agua contenía el tanque antes de iniciar el llenado?

- b) Se desea llenar una pileta chica de lona con una manguera. En el momento de abrir la canilla, la pileta ya contiene algo de agua. Se sabe que, durante el llenado, el agua sale a un ritmo constante.

En la siguiente tabla, se registraron los volúmenes de agua contenidos en la pileta en distintos tiempos medidos a partir de la apertura de la canilla.

| Tiempo (minutos) | Volumen de agua (litros) |
|------------------|--------------------------|
| 10               | 20                       |
| 40               | 65                       |
| 52               | 83                       |

- ¿Cuál fue el volumen a los 50 minutos?
- ¿Cuál fue el volumen a los 51 minutos?
- ¿Cuál fue el volumen inicial de agua?
- ¿Será posible encontrar una fórmula que permita calcular el volumen de agua para cada valor del tiempo? Si te parece que sí, proponé alguna y cotejala con los datos de la tabla. Si te parece que no, explicá por qué.

c)

En la casa de Martina quieren cambiar el termotanque y necesitan vaciarlo. En el momento en que se abren las canillas para vaciarlo, estaba lleno con 100 litros de agua. Se sabe que el agua sale a un ritmo constante y que cada 15 minutos se extraen 20 litros.

- Completá la tabla que relaciona el volumen de agua en el termotanque ( $V$ ), medido en litros, con el tiempo transcurrido desde el momento en que se comienza a vaciar ( $t$ ), medido en minutos.

| $t$ | 0 | 15 | 30 |    | 60 |
|-----|---|----|----|----|----|
| $V$ |   |    |    | 40 |    |

- Confeccioná un gráfico que represente el volumen de agua que hay en el termotanque (en litros) en función del tiempo transcurrido desde que se empieza a vaciar (en minutos).

### Actividad 2:

Grafica en distintos ejes cartesianos las tablas de la actividad anterior y saca alguna conclusión a partir del dibujo.

### Actividad 3:

3) Completa los siguientes cuadros que están debajo a partir de lo que recuerdas de FUNCIÓN LINEAL. Luego compara con tu compañero/a e intercambia conocimientos que te ayuden a seguir completando los cuadros. Puedes utilizar el siguiente video para recordar:

<https://www.youtube.com/watch?v=qE6WdyGP2QI&list=PLnThrAjlRUKRqbuCZhk6U69bfit9bUI89&index=3>

a)

| Fórmula de la función lineal   | Nombre de la gráfica | ¿Qué representa la pendiente? | ¿Qué representa la ordenada al origen? |
|--------------------------------|----------------------|-------------------------------|----------------------------------------|
| <b><math>y = ax + b</math></b> |                      |                               |                                        |

b) Con respecto a la **PENDIENTE** de la función lineal, completa

| Pendiente                          | Comportamiento | Gráfica |
|------------------------------------|----------------|---------|
| Si "a" es positivo ( $a > 0$ )     |                |         |
| Si "a" es negativo ( $a < 0$ )     |                |         |
| Si "a" es igual a cero ( $a = 0$ ) |                |         |

c) Con respecto a la **RAÍZ** de una función lineal (para trabajar en equipos)

Responde:

c1) ¿Qué representa la raíz en una función?

c2) ¿Cuántas raíces puede tener una función lineal?

c3) Grafica cada caso del ejercicio anterior

c4) ¿Cómo se calcula la raíz de una función lineal? ¿Existe otra forma de calcularla?

**Actividad 4:** Gráfica y análisis de funciones lineales.

**RESPONDE:**

4.1) ¿Cuántos métodos para graficar funciones lineales conocés? Enumerarlos y realiza una breve explicación sobre su procedimiento

4.2) Observa las funciones que están debajo y para cada caso previamente predice y anotalo el comportamiento de la gráfica y el punto de intersección con el eje y

a)  $y = -2x + 3$       b)  $y = 3x - 1/2$       c)  $y = -4$       d)  $y = -x$       e)  $y = 4 + 2/3x$       f)  $3x - 2y = 4$

4.3) Grafica y analiza las funciones del punto anterior en sistemas de ejes cartesianos distintos.

**Actividad 5:**

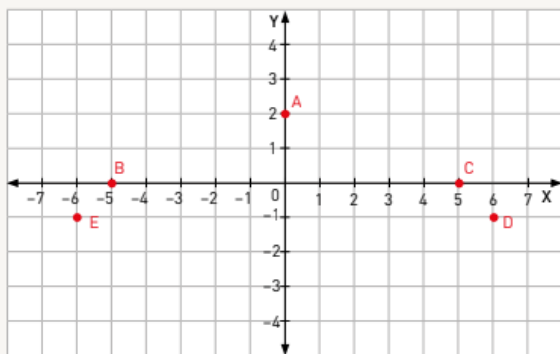
Resuelve los siguientes problemas

En la imagen, se puede ver el puente de la bahía de Sídney, en Australia, visto desde el mar. Observen la fotografía y respondan.



- 1 ¿Es simétrica la estructura? Si es así, tracen en la imagen el eje de simetría.
- 2 ¿Cuál es el punto más alto del puente?, ¿este punto pertenece al eje de simetría?
- 3 Si la curva del puente pudiera proyectarse bajo el mar, ¿cómo creen que continuaría? Expliquen.

Si se relaciona la línea horizontal del puente, donde transitan los vehículos, con el eje X, se pueden ubicar algunos puntos que representen los del puente para identificar cuál es la función asociada a la curva de la imagen.



- 4 Escriban las coordenadas de los puntos anteriores en la tabla. Luego, verifiquen que son puntos de la gráfica de la función  $f(x) = -\frac{2}{25}x^2 + 2$ .

| x | y | f(x) |
|---|---|------|
|   |   |      |
|   |   |      |
|   |   |      |
|   |   |      |
|   |   |      |

- 5 Esbocen la gráfica de la función en el gráfico anterior. ¿Cómo podrían describir esta curva?
- 6 ¿Con cuáles puntos de la gráfica se puede relacionar la ecuación  $-\frac{2}{25}x^2 + 2 = 0$ ? Justifiquen.
- 7 ¿Cómo se puede interpretar el punto más alto del puente en el contexto de la función  $f(x)$ ? Expliquen.

#### Actividad 6:

Patricia quiere armar una huerta rectangular en su patio. Para cercarla cuenta con un alambre de 20 metros de largo. Realiza algunos esquemas para pensar las posibles dimensiones de la huerta y su área.

Área= 16 m<sup>2</sup>

Base= 8 m

Área= 24 m<sup>2</sup>

Base= 6 m

En una tabla, quiere registrar las posibles medidas de la base (en m) y el área de la huerta (en m<sup>2</sup>) teniendo en cuenta que va a usar todo el alambre.

| Base (m)               | 2 | 3 | 6 | 7 | 8 | 8,5 | 9,5 |
|------------------------|---|---|---|---|---|-----|-----|
| Área (m <sup>2</sup> ) |   |   |   |   |   |     |     |

- a. Completen la tabla con los valores que faltan.
- b. Cuando la base del rectángulo mide 6 m, su área es de 24 m<sup>2</sup>.

¿Habrá algún otro valor de la base para el cual el área también sea 24 m<sup>2</sup>?

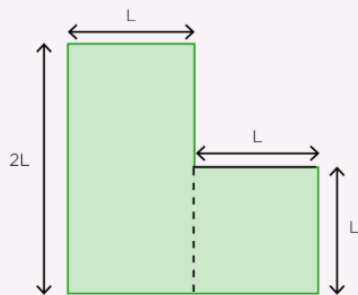
- c. ¿Cuál es el área si la base mide 5 m? ¿Habrá algún otro valor de la base para el cual el área sea la misma?
- d. Realicen un gráfico que muestre el valor del área (en m<sup>2</sup>) en función de la base (en m).
- e. ¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas permiten calcular el área A de la huerta (en m<sup>2</sup>) en función de la medida de la base b (en m)? Expliquen sus conclusiones.
- f.

$$A(b) = b(10 - b) \quad A(b) = b(20 - b) \quad A(b) = 10b - b^2$$

#### Actividad 7:

El siguiente dibujo representa el plano de un galpón.

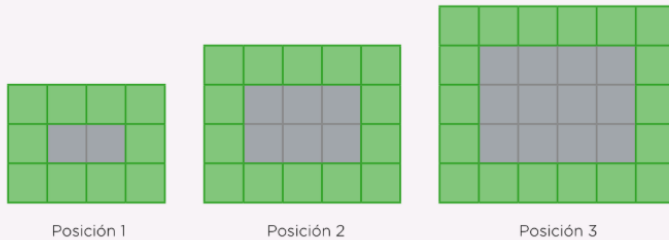
- a. ¿Cuánto mide la superficie del galpón, si la longitud de L es de 18 metros? ¿Y si la longitud de L es de 20 metros?



- b. Escriban una fórmula que les permita calcular la superficie del galpón en función del valor que se le asigne a la longitud L.

#### Actividad 8:

La siguiente secuencia de figuras está conformada por cuadrados verdes y cuadrados grises:



- ¿Cuántos cuadrados verdes tendrá la figura que ocupa la posición 4 de la secuencia? ¿Y cuántos habrá en la que ocupa la posición 6?
- ¿Cuántos cuadrados grises tendrá la figura que ocupa la posición 4 de la secuencia? ¿Y cuántos habrá en la que ocupa la posición 6?
- Escriban una fórmula que permita calcular la cantidad total de cuadrados grises que tiene una figura que ocupa la posición  $n$  de la secuencia. Luego expliquen claramente en qué se apoyaron para construir la expresión.
- Escriban una fórmula que permita calcular la cantidad total de cuadrados verdes que tiene una figura que ocupa la posición  $n$  de la secuencia. Luego expliquen claramente en qué se apoyaron para construir la expresión.
- ¿Qué similitudes y diferencias encuentran entre las dos fórmulas que escribieron?

## INDAGACION

En la etapa de investigación, explorarás la función cuadrática a fondo. Primero, investigarás sus diferentes expresiones y sus aplicaciones reales. Luego, construirás sus gráficos con el uso de fórmulas y usarás GeoGebra para visualizar cómo cambian las gráficas al modificar los coeficientes

### DURACIÓN ESTIMADA DE LA ETAPA

### RECURSOS

Plan de aprendizaje, carpeta con hojas, cartuchera completa, calculadora, netbook.

**Comentado [1]:** con un graficador, ver como se modifica el gráfico de la función al cambiar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en la fórmula

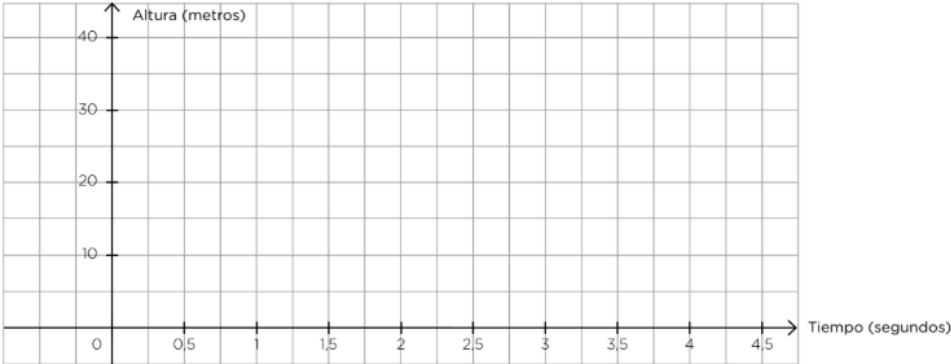


**Actividad 9:** Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde la ventana de una habitación. Se sabe que  $A(t)=-5t^2+15t+20$  es la fórmula que permite calcular la altura (en metros) a la cual se encuentra la piedra, medida desde el suelo,  $t$  segundos después de haber sido lanzada.

a. Completá la siguiente tabla.

|                           |     |   |   |     |
|---------------------------|-----|---|---|-----|
| <b>t (en segundos)</b>    | 0,5 | 1 | 2 | 3,5 |
| <b>Altura (en metros)</b> |     |   |   |     |

- b. ¿Desde qué altura se lanza la piedra?
- c. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza esa piedra, y en qué momento la alcanza?
- d. ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al piso?
- e. En el siguiente sistema de ejes cartesianos, realizá un gráfico aproximado que muestre la altura de la piedra (en metros) en función del tiempo transcurrido desde que fue lanzada (en segundos).



**Actividad 10:** Completa la siguiente tabla, indicando si cada expresión es una función cuadrática. Si es así, determina sus coeficientes a, b y c.

| Función                        | ¿Es cuadrática? | Coeficientes |   |   |
|--------------------------------|-----------------|--------------|---|---|
|                                |                 | a            | b | c |
| $f(x) = 5x^2$                  |                 |              |   |   |
| $g(x) = x^2 - 2$               |                 |              |   |   |
| $h(x) = -2x^3 + 2x + 4$        |                 |              |   |   |
| $q(x) = (x + 1)(x - 9)$        |                 |              |   |   |
| $r(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 5)$ |                 |              |   |   |
| $t(x) = (2x + 1)^2 - 4x^2 - 1$ |                 |              |   |   |

En las siguientes funciones cuadráticas, para cada valor de  $x$ , ¿cuál es el punto correspondiente en su gráfica?

a.  $f(x) = -5x^2 + 6$ , con  $x = 0$  el punto es

b.  $q(x) = \frac{3}{4}x^2 + x + 1$  con  $x = -2$  el punto es

c.  $r(x) = -8x^2 - 3x + 1$  con  $x = \frac{1}{2}$  el punto es

d.  $p(x) = x^2 - x + 2$  con  $x = 0,6$  el punto es

e.  $s(x) = -2x^2 - 12x + 9$  con  $x = 4$  el punto es

f.  $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$  con  $x = -3$  el punto es

#### Actividad 12:

Francisca y Mateo discuten sobre la función  $f(x) = x^2 + 5x$ . Mateo afirma que la función no es cuadrática pues no está presente el término independiente. Francisca, por otra parte, afirma que es una función cuadrática y que posee un término independiente. ¿Quién tiene la razón?, ¿por qué?

#### Actividad 13:

Las siguientes construcciones presentan formas parabólicas.



¿Qué características posee cada una de estas **parábolas**?

Determina si cada parábola es **cóncava** o **convexa**.

A: \_\_\_\_\_ B: \_\_\_\_\_

En cada caso, traza el eje de simetría de la parábola y marca el punto de intersección entre el eje de simetría y la parábola. Dicho punto se conoce como **vértice** de la parábola.

Luego, determina si el vértice de la parábola es un punto mínimo o máximo según su posición.

En A el vértice es un punto \_\_\_\_\_ y

en B es un punto \_\_\_\_\_.

**Actividad 14:** Observa cada gráfica y determina la concavidad de cada una y si sus vértices son máximos o mínimos. Calcula, además, las soluciones de las ecuaciones cuadráticas cuando el valor de la función es igual a cero.

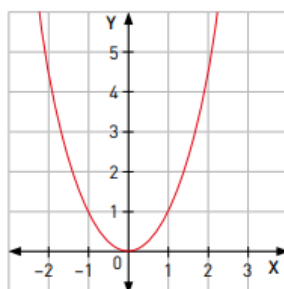
a.  $f(x) = x^2$

Concavidad: \_\_\_\_\_

Vértice:

$x_1 =$

$x_2 =$



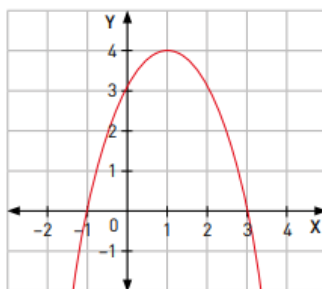
b.  $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

Concavidad: \_\_\_\_\_

Vértice:

$x_1 =$

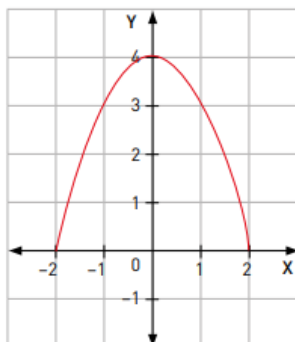
$x_2 =$



**Actividad 15:**

Se desea medir la altura máxima y la distancia máxima de un chorro de agua que es lanzado con una manguera. Para realizar las mediciones de distancia y altura se trazó en la pared un plano cartesiano graduado en metros.

- Observa la trayectoria del chorro de agua. ¿Se la puede relacionar con una función cuadrática? Comenta con un compañero o compañera.
- ¿Cómo se puede describir la trayectoria del chorro de agua en términos de la concavidad y el vértice?
- Observa el punto de la salida del agua de la manguera y el punto de su llegada al suelo. ¿A qué puntos corresponden en la gráfica de una función cuadrática? Explica.
- ¿Cuál es la distancia máxima alcanzada por el chorro de agua?
- ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el chorro de agua?
- ¿Qué punto de la parábola representa la altura máxima del chorro de agua?



#### Actividad 16:

Ya que la parábola tiene ciertas características gráficas, es posible esbozar su gráfica a partir de algunos puntos principales que se pueden calcular a partir de los coeficientes de la función. Por ejemplo, para graficar  $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ , podemos buscar los puntos de intersección con los ejes, y el vértice.

- ¿En qué punto la función interseca el eje Y?

Para calcular el punto de intersección con el eje Y, se reemplaza en la función el valor asociado de x.

Entonces,  $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 6 =$

Luego, el punto es (0, )

¿Cuál es el valor de x para todos los puntos del eje Y?  
Justifica.

- ¿En qué punto la función interseca el eje X?

Para calcular el o los puntos de intersección con el eje X, se iguala la función a cero y se resuelve la ecuación correspondiente.

Entonces de la ecuación  $2x^2 - 8x + 6 = 0$  se obtienen las soluciones  $x_1 =$   y

$x_2 =$  . Luego, los puntos son (, 0) y (, 0).

¿Cuál es el valor de y para todos los puntos del eje X?  
Justifica.

c. ¿En qué punto se encuentra el vértice de la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ?

El vértice se puede obtener a partir de sus coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  como

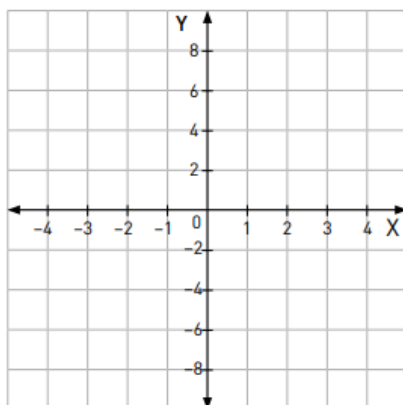
el punto  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ .

Los coeficientes de  $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$  son  $a = \boxed{\phantom{00}}$ ,  $b = \boxed{\phantom{00}}$  y  $c = \boxed{\phantom{00}}$ , y se

reemplazan en  $-\frac{b}{2a} = \boxed{\phantom{00}}$  y  $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \boxed{\phantom{00}}$ .

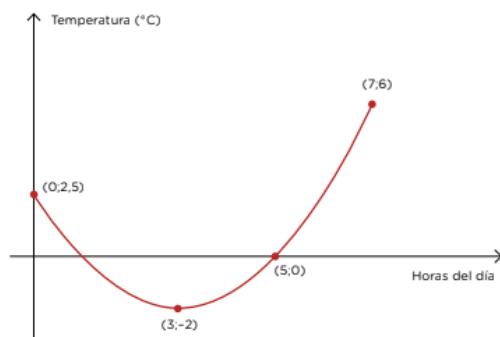
Luego, el vértice es el punto  $\boxed{\phantom{00}}$ .

d. Ubica todos los puntos calculados en el siguiente gráfico. Luego, únelos a mano alzada para obtener la gráfica de la función.



#### Actividad 17:

El siguiente gráfico de una función cuadrática describe la temperatura (en  $^{\circ}\text{C}$ ) registrada en Ushuaia, desde las 0 horas hasta las 7 de la mañana de un día de otoño. La temperatura mínima fue de  $-2^{\circ}\text{C}$  a las 3 de la mañana.



- ¿Cuál fue la temperatura a las 0 horas? Explicá cómo te diste cuenta.
- A las 5 de la mañana la temperatura fue de 0 °C, ¿en qué otro horario se registró esa temperatura? ¿Cómo lo obtuviste?
- ¿Cuál fue la temperatura a las 6 de la mañana?
- Indicá cuál de estas fórmulas puede representar la situación planteada en el gráfico, donde  $x$  representa la hora del día y  $f(x)$  la temperatura registrada en cada momento.

$$f(x) = -0,5 (x-1) (x-5)$$

$$f(x) = x^2 + 2,5$$

$$f(x) = 0,5 (x-1) (x-5)$$

#### Actividad 18:

A continuación, se presentan tres fórmulas y tres gráficos correspondientes a funciones cuadráticas. Decidí, para cada una de las fórmulas, cuál es el gráfico que le corresponde y explicá por qué.

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1$$

$$g(x) = (x - 2)^2 + 1$$

$$h(x) = 2(x - 1) (x + 3)$$

Gráfico 1

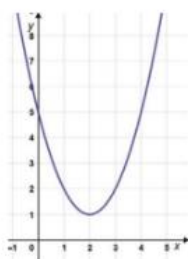


Gráfico 2

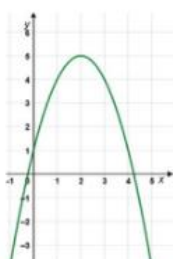
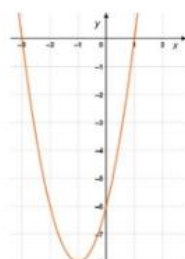


Gráfico 3



#### Actividad 19:

Miguel y Ernesto se asociaron para desarrollar un microemprendimiento como técnicos de computadoras.

Para decidir qué precio cobrarán por hora consultaron a un amigo economista. Teniendo en cuenta los costos fijos y la relación entre el precio que cobrarían por hora y la cantidad de trabajo que tendrían, el amigo les presenta la siguiente fórmula, que permite calcular la ganancia mensual en función del precio por hora:

$$G(p) = 3200 - 2(p - 80)^2$$

- Miguel propone cobrar \$56 por hora. ¿Cuánto ganarían en ese caso?
- Ernesto quiere aumentar la ganancia. ¿A qué precio podrían cobrar la hora?

c) ¿Habrá otro valor de precio por hora con el cual se pueda obtener una ganancia de \$2.048?

d) ¿Es posible obtener una ganancia de \$1.400? ¿Y de 3.500?

e) ¿Cuál es la máxima ganancia que se puede obtener? ¿Qué precio por hora hay que cobrar para obtener esa ganancia?

Y si la fórmula de la ganancia fuera  $G(p) = 400 - 3(p - 170)^2$

a) ¿Pueden dar dos valores de  $p$  que den la misma ganancia?

b) ¿Cuál sería la máxima ganancia y para qué precio?

#### Actividad 20:

Daniela confecciona un modelo de mates artesanales y los comercializa mediante su página web. Para establecer el precio más conveniente al que debe vender el producto, su contadora armó una fórmula que le permite calcular la ganancia semanal (en pesos) en función del precio  $p$  de cada mate (en pesos):

$$G(p) = 5.000 - 2(p - 250)^2$$

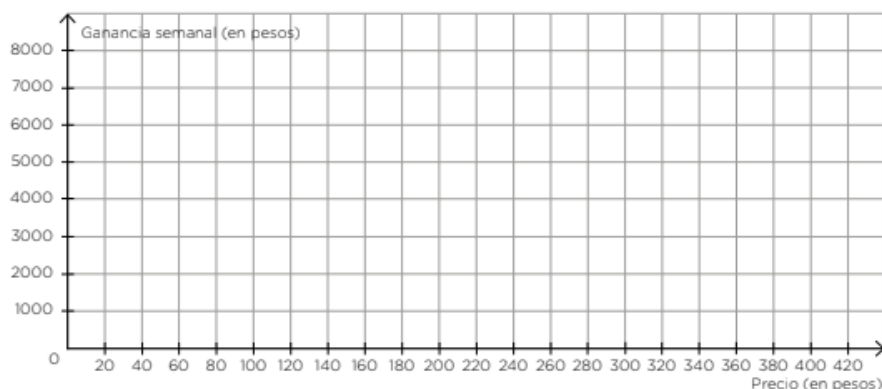
a. ¿Cuál será la ganancia semanal si decide vender cada mate a \$220? ¿Hay algún otro precio con el cual obtenga la misma ganancia semanal?

b. ¿Cuál será la ganancia semanal si decide vender cada mate a \$240? ¿Hay algún otro precio con el cual obtenga la misma ganancia semanal?

c. ¿Cuál debe ser el precio de cada mate para que la ganancia sea máxima?

d. Esta semana Daniela vendió varios mates y obtuvo ganancia cero. Según la fórmula que le armó su contadora, ¿a qué precios pudo haber vendido los mates?

e. En el siguiente sistema de ejes cartesianos, realizá un gráfico aproximado que muestre la ganancia semanal (en pesos) en función del precio de cada mate (en pesos).



## PRODUCCIÓN

En esta etapa, vas a poner en práctica lo que aprendiste durante la etapa de indagación. Realizarás actividades que te permitirán aplicar las fórmulas y conceptos matemáticos para resolver problemas y analizar situaciones nuevas. Trabaja de manera autónoma y asegurate de reflexionar sobre cada tarea, ya que esto te ayudará a consolidar su comprensión.

### DURACIÓN ESTIMADA DE LA ETAPA

#### Actividad 21:

Dadas las siguientes funciones, hallar el máximo o el mínimo valor que puede alcanzar cada una de ellas y en qué valor de  $x$  lo alcanza.

- a)  $f(x) = (x + 5)^2 - 4$
- b)  $g(x) = -2(x - 5)^2 + 1$
- c)  $h(x) = 5 - (4x + 3)^2$
- d)  $i(x) = (7x - 5)^2 + 18$

#### Actividad 22:

Hallar el vértice de cada parábola. Estudiar si la parábola corta al eje  $x$ , y dónde.

- a)  $y = 2(x - 2)^2 + 1$
- b)  $y = -(x + 2)^2 + 4$
- c)  $y = -2(3x - 1)^2 - 12$
- d)  $y = (2x + 2)^2 - 9$
- e)  $y = 4(x + 2)^2 - 1$
- f)  $y = (2x + 2)^2 - 1$
- g)  $y = 4(x - 2)^2$
- h)  $y = x^2$

#### Actividad 23:

Dada la función  $f(x) = 3(x - 2)^2 - 27$ , encontrá:

- a. Las coordenadas del vértice de la parábola.
- b. La ordenada al origen de la función.
- c. Las raíces de la función.

#### Actividad 24:



Si es posible, escribí lo que se indica (si no es posible, explicá por qué).

- a) La ecuación de una parábola que tenga un mínimo igual a 9 en  $x = 5$ . ¿Hay una sola posibilidad?
- b) La ecuación de una parábola que tenga un máximo igual a 8 en  $x = -7$ , y que pasa por el punto (5; 1).
- c) La ecuación de una parábola que tenga un mínimo igual a 3 en  $x = 7$  y pase por el punto (5; 0).

Actividad 25:

Imagina que eres el dueño de un negocio de hamburguesas. Tu ganancia mensual  $G$  en pesos depende del precio  $x$  que le pongas a cada hamburguesa, según esta función:

$$G(x) = -100x^2 + 8000x - 120000$$

- a- ¿A qué precio no ganas ni pierdes nada?
- b- ¿A qué precio obtienes la ganancia máxima?

Usar la lógica del gráfico para confirmar que el resultado matemático tiene sentido en la vida real.

Actividad 26:

La señora Laura desea vender empanadas y necesita determinar cuál debe ser el precio de venta para obtener las mayores ganancias. El precio debe ser tal que permita cubrir los costos de producción y el trabajo realizado.



**A)**

Si se ha calculado que la ganancia obtenida está dada por la función  $G(p) = -\frac{1}{5}p^2 + 350p - 100\,000$ , donde  $p$  el precio en que se vende cada empanada (en pesos).

- a. ¿De cuánto será la ganancia si vendiera cada una a \$1000?

- b. ¿Qué ocurrirá con la ganancia si las vendiera a \$400? Expliquen.  
c. ¿Qué ocurrirá si las vendiera a un precio menor? Justifiquen.

### B)

Al observar la expresión algebraica de la función  $G(p)$ , ¿es posible decidir si la función tiene un valor máximo o mínimo?, ¿a qué punto de la gráfica se asocia este valor?

- a. En el contexto del problema, ¿cómo se interpreta dicho valor?  
b. Entonces, ¿a cuánto debe vender cada empanada la señora Laura para que su ganancia sea máxima?  
c. ¿Cuál sería esa ganancia?



### Ayuda

El resultado de todo problema matemático con un contexto determinado debe ser interpretado ajustándose a dicho contexto. Sean cantidades o mediciones, todo resultado numérico de este tipo debe tener alguna unidad de medida asociada o alguna descripción que sea **pertinente** a la solución del problema.

### Actividad 27:

Antonio analiza los precios y la cantidad de productos vendidos para fijar el precio de venta de sus artesanías. Él ha observado que, de acuerdo a la **demanda**, la cantidad de productos vendidos disminuye al aumentar su precio de venta, según la función  $x(v) = -0,25v + 600$ , donde  $x$  corresponde a la cantidad de artesanías y  $v$  al precio de venta. Como corresponde, el ingreso total  $I$ , obtenido en la venta respecto de la cantidad de productos vendidos  $x$ , está dado por la función  $I(x) = vx$ . ¿A qué precio debe vender Antonio cada uno de sus productos para tener el máximo de ingresos con la venta?



- a. Expresa el ingreso total en función del precio de venta  $v$ .

El ingreso total de la venta está dado por la función  $I(x) = vx$

La cantidad  $x$  está dada por  $x(v) = -0,25v + 600$

Al remplazar se obtiene que el ingreso total  $I$  en función del precio de venta  $v$  corresponde a:

$$I(v) = v \cdot ( \quad )$$

Resolviendo algebraicamente se obtiene la función cuadrática:

$$I(v) = \quad$$

- b. Calcula el vértice de la parábola de la función  $I(v)$  e interprétalo.

El vértice corresponde al punto  $\quad$  de la parábola. Al calcularlo se obtiene la coordenada:



El producto se debe vender a \$  $\quad$  para obtener un ingreso máximo de \$  $\quad$

#### Actividad 28:

Respondé las siguientes preguntas y justificá la respuesta en cada caso:

- Se sabe que una parábola contiene a los puntos  $(100;1)$  y  $(-100;1)$ , ¿es posible que su vértice sea  $(0;2)$ ? ¿Podría ser el vértice el punto  $(0;1)$ ?
- ¿Cuáles pueden ser las coordenadas del vértice de una parábola que contiene a los puntos  $(0;2)$  y  $(10;2)$ ?
- Se sabe que una parábola contiene a los puntos  $(-126;8)$  y  $(124;8)$ , ¿es posible que su vértice sea  $(2;1)$ ?
- ¿Cuáles pueden ser las coordenadas del vértice de una parábola que contiene a los puntos  $(-234;15)$  y  $(242;15)$ ?
- ¿Es posible que una parábola con vértice en el punto  $V = (0;-3)$  contenga a los puntos  $(4;2)$  y  $(-4;-2)$ ?

Actividad 29:

Uní con flechas cada función con la afirmación que corresponda. Justificá en cada caso.

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

La función tiene dos raíces

$$g(x) = 2x^2 + 2x + 2$$

La función no tiene raíces

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

La función tiene una única raíz

Actividad 30:

Indicá cuál de las siguientes fórmulas corresponde a la gráfica de la función:

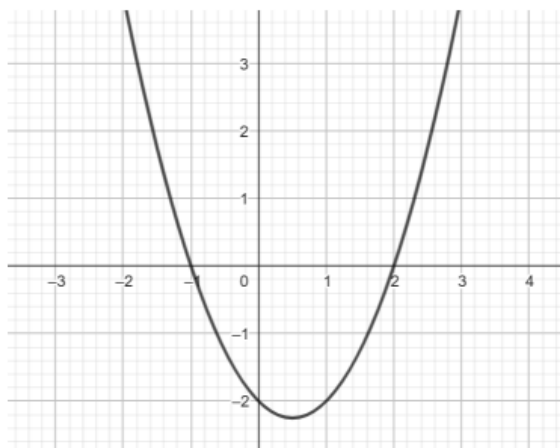
☐  $f(x) = (x + 2)(x - 1)$

☐  $f(x) = (x - 2)(x + 1)$

☐  $f(x) = (x - 2)(x - 1)$

☐  $f(x) = -(x - 2)(x + 1)$

Explica cómo te diste cuenta.



Actividad 31:

Ricardo, Milena y Gastón, conversan sobre las funciones cuadráticas.

Gastón dice que si una fórmula está escrita en forma canónica, por ejemplo:  
 $f(x) = a \cdot (x - 2)^2 + 3$  (con  $a \neq 0$ ), 2 es la abscisa del vértice y 3 es la ordenada del vértice.

Milena dice que si la parábola que representa a la función es cóncava hacia arriba, el conjunto imagen es  $[3 ; +\infty)$ . Y que, si la parábola es cóncava hacia abajo, el conjunto imagen es  $(-\infty ; 3]$ .

Ricardo dice que si la función tiene ceros,  $x=2$  es el valor medio entre ellos.

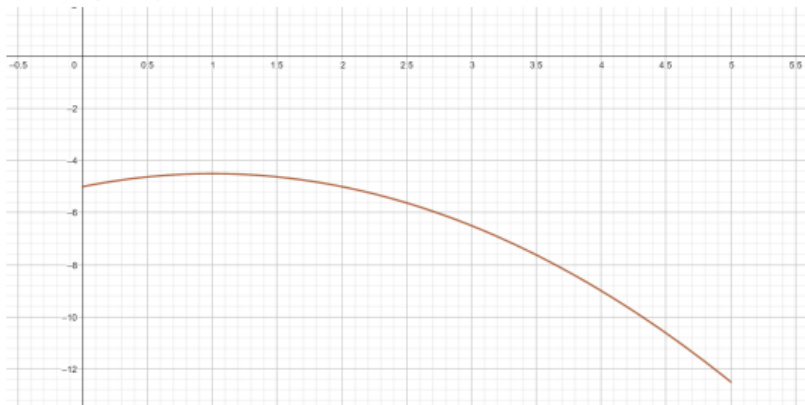
¿Quién o quiénes tienen razón?

#### Actividad 32:

En la práctica de Snowboard la altura de los saltos, medida en metros, que alcanza un deportista de elite, se puede representar por la función:  
 $h(t) = -2t^2 + 8t$  con  $t$  segundos que mide el tiempo que dura el salto.

Realizá el gráfico de la función teniendo en cuenta el contexto del problema e interpretá qué representa el vértice, las raíces y la ordenada al origen en ese contexto.

La posición de una sonda marina está representada por la función  
 $f(x) = -0,5 \cdot (x - 1)^2 - 4,5$  y por la gráfica que se muestra a continuación.



- Calcule  $f(0)$ ,  $f(1)$  y  $f(4)$ . ¿Cómo interpretás cada uno de estos valores en términos de la situación?
- ¿En qué momento la sonda estuvo más cerca del nivel del mar? ¿A cuántos metros? Escribí las coordenadas de ese punto, ¿se visualizan en la fórmula de la función?
- ¿Tiene ceros la función? Interprete su respuesta en términos de la situación.

#### Actividad 33:

Se ha monitoreado el depósito de agua de una vivienda durante un período de tiempo. La siguiente fórmula permite calcular la cantidad litros de agua que había en el depósito durante el tiempo de monitoreo (medido en horas):

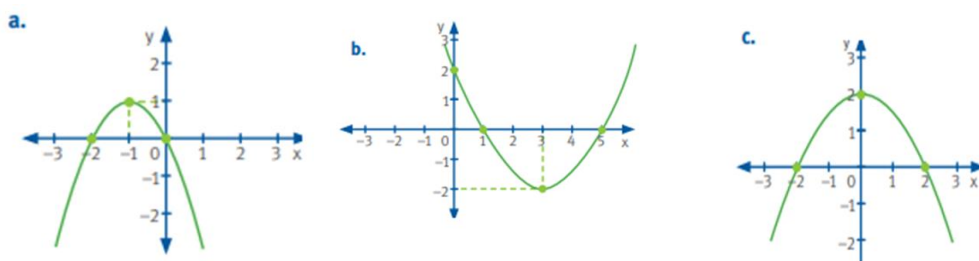
$$g(x) = -2x \cdot (x - 12)$$

- ¿Qué representan las raíces de la función en este contexto?
- ¿Qué representa el vértice de la parábola en esta situación?
- Realizá un gráfico de la función teniendo en cuenta el contexto del problema.

#### Actividad 34: Graficar y analizar las siguientes funciones

- $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$
- $g(x) = -5(x+4)^2$
- $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$
- $f(x) = x^2 + 4x + 4$
- $f(x) = (x+5)^2 - 8$
- $f(x) = -x^2 - 5x - 6$
- $f(x) = (x-2)(x+2)$

**Actividad 35:** Observa los gráficos e indica para cada una de las funciones Dominio, Imagen, Ceros o Raíces, Intersección con el eje Y, máximo o mínimo y vértice e Intervalo de crecimiento y decrecimiento.



Actividad 36:

**Para reflexionar sobre lo aprendido hasta ahora:**

Luego de haber trabajado con las diferentes actividades.

Escribí un listado de las ideas y de los ejemplos de lo que aprendiste con estas actividades. Las siguientes preguntas son para ayudarte a pensar:

¿Qué te resultó más fácil? ¿Y más difícil?

¿Qué cosas nuevas aprendiste? ¿Qué cosas ya recordabas de años anteriores?

¿Qué errores tuviste al resolver los problemas y cómo te diste cuenta de que eran errores?

¿Qué estrategias utilizaste para resolver los diferentes problemas? ¿Qué harías diferente la próxima vez que enfrentes un problema similar a los anteriores?

Reunite con un grupo de compañeros/as y escriban un listado de las cuestiones que les parezcan importantes recordar sobre lo que estuvieron trabajando con estas actividades.

## EVALUACIÓN

*En esta etapa final, tendrás la oportunidad de reflexionar sobre todo lo que has aprendido acerca de las funciones cuadráticas y sus representaciones gráficas. Las actividades que realizarás están diseñadas para que puedas demostrar tu comprensión profunda de estos conceptos, desde la identificación de los elementos clave de una parábola hasta la resolución de problemas complejos que involucran funciones cuadráticas en diversos contextos.*

**DURACIÓN ESTIMADA DE LA ETAPA****RECURSOS**

Plan de aprendizaje, carpeta con hojas , cartuchera completa, calculadora, netbook.

Actividad 37:

Indicá cuál o cuáles de las siguientes fórmulas expresa el área del cuadrado

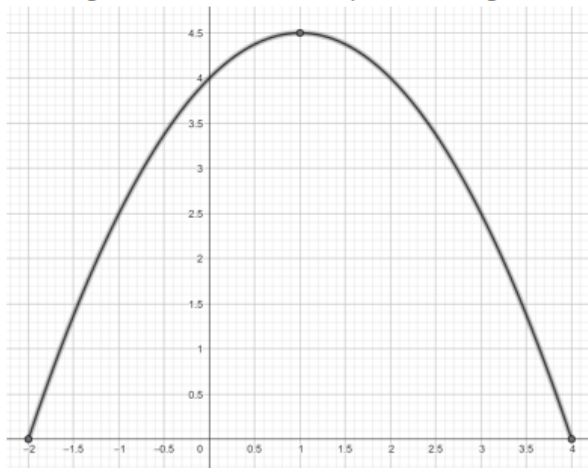
- ☐  $A = (x + 3) \cdot 4$
- ☐  $A = (x + 3)^2$
- ☐  $A = (x + 3)(x + 3)$
- ☐  $A = x^2 + 6x + 9$
- ☐  $A = x^2 + 9$

$x + 3$

Actividad 38:



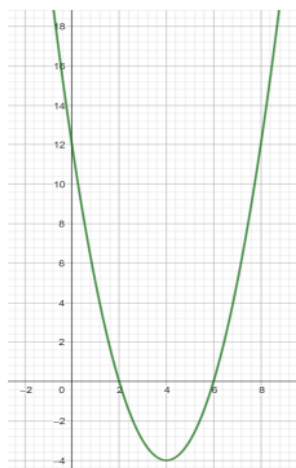
En un laboratorio se controló la temperatura (en  $^{\circ}\text{C}$ ) de una sustancia desde dos horas antes del cambio de turno de los técnicos (considerado el momento "0") y hasta cuatro horas después. El gráfico muestra las temperaturas registradas en ese período:



- ¿Cuál fue la mayor temperatura que tomó? ¿En qué momento?
- ¿Qué temperatura tenía la sustancia en el momento del cambio de turno? ¿Se volvió a repetir esa temperatura? ¿En qué momento?
- ¿Qué temperatura tenía la sustancia en el inicio y en el final del control?
- ¿En qué momentos la temperatura fue de  $2,5^{\circ}\text{C}$ ?

**Actividad 39:** Indicá cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas respecto del gráfico:

- ☐ La gráfica alcanza un punto mínimo.
- ☐ La gráfica corta al eje  $x$  en dos puntos.
- ☐ La ordenada al origen es "0".
- ☐ La imagen de 8 es 12.
- ☐ El punto  $(4;1)$  pertenece a la función.
- ☐ La gráfica corta al eje  $y$  en dos puntos.
- ☐ "-2" no es parte de los valores que toma  $x$ .



**Actividad 40:**

Un arquitecto diseña una rampa de skate cuya forma sigue la función cuadrática:

$$f(x) = 0.2x^2 - 2x + 5$$

- a) ¿Cuál es la altura mínima de la rampa?
- b) ¿Desde qué altura se tira el skater?
- c) Graficá.
- d) ¿Qué pasa si cambiamos la rampa?: ¿si cambiamos el +5 por un +2 ? y ¿si cambiamos el 0.2 por un 0.5?
- e) Expresa la ecuación en su forma canónica y factorizada.

**Actividad 41:**

El contador de una empresa ha determinado que la ganancia  $G$  (en \$), cuando se producen  $x$  unidades de cierto artículo, se puede calcular con la fórmula.  $G(x) = -5x^2 + 1000x - 5000$

- \* ¿Qué ganancia obtendrá la empresa cuando se produzcan 50 unidades? ¿Y cuando se produzcan 70 unidades?

- \* ¿Cuántas unidades se deben producir para que la ganancia resulte mayor que \$13 000?
- \* ¿Cuántas unidades debe producir la empresa para que la ganancia obtenida sea la máxima posible?
- \* ¿Cuál es esa ganancia máxima?

**Actividad 42:** Representar gráficamente y analizar las siguientes funciones:

a)  $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$       b)  $f(x) = -5(x+4)^2$       c)  $f(x) = x^2 - 4$       d)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$

**Actividad 43:** JORNADA LÚDICA Los estudiantes de los tres cursos de 4to año se reunirán por grupos en el patio de la escuela para realizar una actividad lúdica integrando los conceptos trabajados en este plan, con material proporcionado por los profesores.

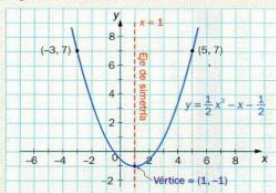
# Para recordar

## Función cuadrática

Es toda función cuya fórmula es de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales, y  $a \neq 0$ ).

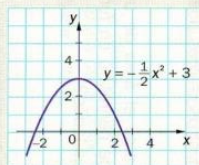
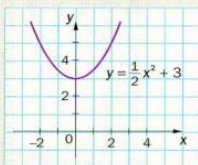
El gráfico de una función cuadrática es una curva llamada **parábola**. En el ejemplo se ven sus elementos y características.

➡ **Eje de simetría:** es la recta paralela al eje  $y$ , que divide la curva en dos ramas simétricas. Se puede hallar su ecuación empleando la fórmula  $x_v = -\frac{b}{2a}$ .

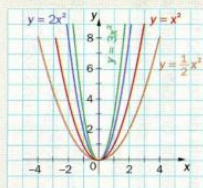


➡ **Vértice:** es el punto del eje de simetría en el que la función pasa de ser decreciente a ser creciente, o viceversa. Por lo tanto, resulta que la ordenada del vértice,  $y_v$ , es el **mínimo** (o el **máximo**) de la función.

➡ **Abertura:** si  $a > 0$ , la parábola es abierta hacia arriba; si  $a < 0$ , es abierta hacia abajo.



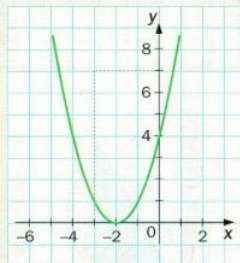
➡ **Coefficiente principal  $a$ :** cuanto mayor sea  $|a|$ , más "cerradas" estarán sus ramas.



## Ordenada al origen

La **ordenada al origen**,  $f(0)$ , es la ordenada del punto de intersección entre la parábola y el eje de ordenadas, o sea, es el valor que toma  $y$  cuando  $x = 0$ .

➔ En  $f(x) = x^2 + 4x + 4$  es  $f(0) = 4$ .



## Función cuadrática y ecuación cuadrática

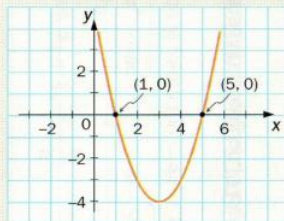
Es importante no confundirlas.

La **función cuadrática** tiene la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (con  $a \neq 0$ ).

A cada valor de  $x$  le corresponde un único valor de  $y$ . Su gráfico es una **parábola**.

En cambio,  $ax^2 + bx + c = 0$  es una **ecuación cuadrática**. Sus soluciones reales, cuando las tiene, brindan las **raíces** de la función cuadrática, o sea, dan las abscisas para las cuales la función cuadrática es cero.

➔ En  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  es  $f(1) = f(5) = 0$ .



## Ecuaciones cuadráticas incompletas (b o c son nulos)

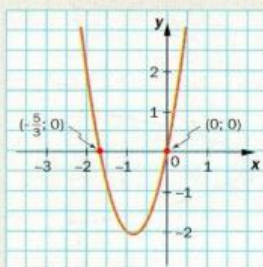
Si  $f(x) = ax^2 + bx$ , se hallan sus raíces resolviendo la ecuación  $ax^2 + bx = 0$ .

➔ Si  $f(x) = 3x^2 + 5x$ , entonces  $3x^2 + 5x = 0$  se puede resolver así.

Se saca factor común:  $x(3x + 5) = 0$ .

Como el producto es nulo si alguno de los factores lo es, uno o ambos, entonces las

raíces son:  $x_1 = 0$  y  $x_2 = -\frac{5}{3}$ .

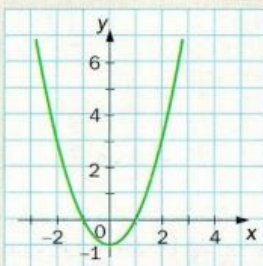


Si  $f(x) = ax^2 + c$ , se hallan sus raíces resolviendo la ecuación  $ax^2 + c = 0$ .

➔ Si  $f(x) = x^2 - 1$ , entonces se resuelve  $x^2 - 1 = 0$ , o sea,  $x^2 = 1$ .

Aplicando raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad, resulta:

$\sqrt{x^2} = |x| = 1$ , o sea que las raíces son  $x_1 = 1$  y  $x_2 = -1$ .



## Ecuaciones cuadráticas completas

Son de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , con **a**, **b** y **c** distintos de cero.

Una manera de resolverlas es aplicar la fórmula resolvente de Bhas-kara, que conviene que recuerdes y sepas aplicar.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

➔ Si se quieren hallar las soluciones de  $x^2 - 6x + 5 = 0$ , entonces:

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

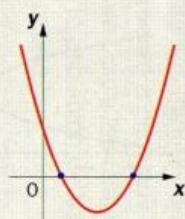
O sea,  $x_1 = 5$  y  $x_2 = 1$ .

Para esta ecuación, las soluciones son dos raíces reales y distintas, pero, como se explica a continuación, esto no siempre es así.

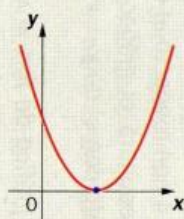


## El discriminante y las raíces de la función

En la fórmula de Bhaskara la expresión bajo el signo radical recibe el nombre de **discriminante, D**. Permite anticipar si la parábola cortará el eje  $x$  en dos puntos, en uno o en ninguno.



$D > 0$ , dos raíces reales y distintas.



$D = 0$ , hay una única raíz real, llamada **raíz doble**.



$D < 0$ , no tiene raíces reales.

## Distintas formas de la función cuadrática

**Polinómica:** es la ya conocida  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

**Forma factorizada:** se la puede expresar como un producto en el que se pueden observar sus raíces.  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ , siendo  $x_1$  y  $x_2$  las raíces de la función.



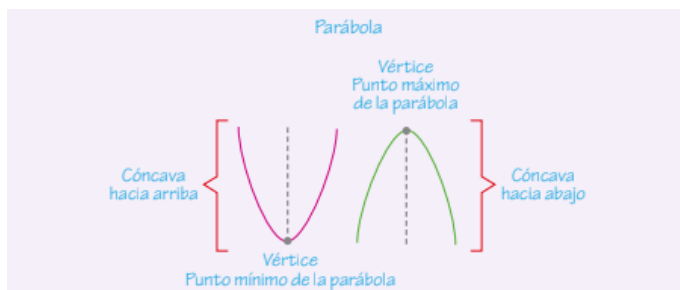
Como  $x_1 = 1$  y  $x_2 = -2$  son las raíces de  $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$ , la función se puede expresar como  $f(x) = 3(x - 1)(x + 2)$ .

Si se desarrolla esta expresión, se llega nuevamente a la forma polinómica.

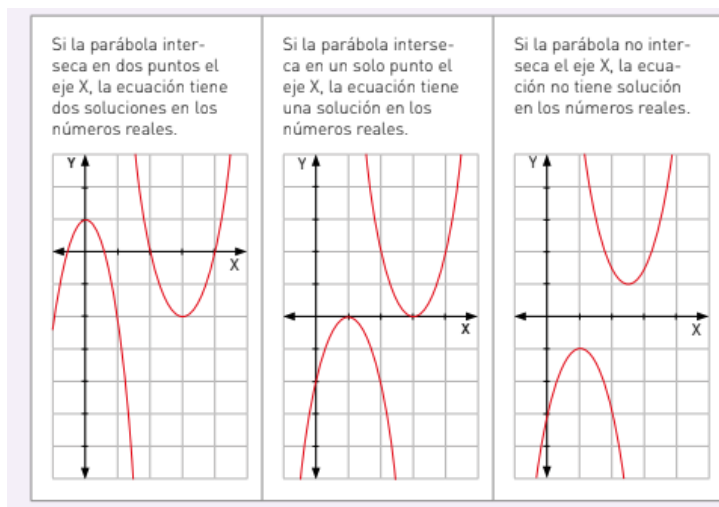
**Forma canónica:**  $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ , en este caso se observan las coordenadas del vértice  $(x_v; y_v)$ .



El vértice de la parábola cuya ecuación es  $f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$  es el punto  $V = (2; 1)$ . Si se desarrolla el cuadrado y se aplica la propiedad distributiva, se puede obtener la forma polinómica.



- Los puntos en que la gráfica de una función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  intersecan el eje X se asocian a las soluciones de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ , y se cumple que:



**El modelo cuadrático permite abordar el estudio sistemático de un tipo de crecimiento no uniforme, que enriquece el trabajo hecho con funciones lineales y es la puerta de entrada al estudio de funciones polinómicas;**

- la resolución de distintos problemas asociados con estas funciones dará sentido al

**trabajo algebraico con las fórmulas de las funciones cuadráticas;**

- las diferentes escrituras de la fórmula de una función cuadrática, puestas en rela-

**ción con las características del gráfico cartesiano, enriquecen el sentido de ambas formas de representación de las funciones;**

- el estudio de las ecuaciones de segundo grado a partir de las funciones cuadráticas permite construir un sentido de las ecuaciones que no se agota en la aplicación de una regla para resolverlas.